# Interstellare Magnetfelder

Von Arnulf Schlüter und Ludwig Biermann

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 5a, 237—251 [1950]; eingegangen am 3. März 1950)

Bei der turbulenten Bewegung des interstellaren Gases werden sich Elektronen und Ionen schon wegen ihrer verschiedenen Massen nicht genau gleich bewegen. Hierdurch werden Magnetfeldlinien erzeugt, die wegen der praktisch unendlich hohen Leitfähigkeit des interstellaren Gases an diesem haften. Durch die Verwirbelung infolge der turbulenten Bewegung wird die Magnetfeldstärke zunächst exponentiell mit der Zeit zunehmen. Durch die von der Turbulenz höherer Ordnung erzeugten Felder wird die Turbulenz niedriger Ordnung so affiziert, daß sie zum Anwachsen des magnetischen Feldes nicht mehr beiträgt. Die gegenwärtige Feldstärke sollte etwa $10^{-6}$ Gauß betragen und die Turbulenz bis etwa herauf zur Ordnung $10^2$ parsec wesentlich modifiziert sein. Dies ist einerseits verträglich mit den Beobachtungen an der Verteilung interstellarer Absorptionslinien und erklärt andrerseits die beobachtete, weitgehend isotrope Verteilung der Höhenstrahlung.

Die im folgenden dargestellten Überlegungen wurden ausgelöst durch Untersuchungen über die Möglichkeit der Entstehung von Ultrastrahlung im interstellaren Raum [1]. Die Bewegung der Ultrastrahlungsteilchen durch den interstellaren Raum wird durch magnetische Felder genügender Stärke ($10^{-6}$ bis $10^{-5}$ Gauß) in sehr hohem Maße beeinflußt; diese Tatsache haben in letzter Zeit besonders Alfvén, Richtmyer und Teller [2] sowie Fermi [3] hervorgehoben, und der letztere hat das Potenzspektrum der Ultrastrahlung aus ihrer Wechselwirkung mit interstellaren Magnetfeldern zu erklären versucht. Im Verlauf unserer Untersuchungen zeigte sich nun, daß Magnetfelder zwangsläufig im turbulenten interstellaren Gas entstehen müssen und daß (vgl. Fermi) diese Felder durch Induktionseffekte bis zu der geforderten Stärke anwachsen sollten. Sie spielen daher eine wesentliche Rolle für die Dynamik und Turbulenztheorie des interstellaren Mediums. Nach diesem Bilde baut die auf dem Rotationszustand der Milchstraße beruhende Turbulenz die Magnetfelder auf (welche wieder auf die Turbulenz zurückwirken), und die Magnetfelder im turbulenten interstellaren Gas geben ständig einen Teil ihrer Energie an die Ultrastrahlungsteilchen ab.

I. Es gibt — wenn man von der noch ungeklärten Polarisation des Lichts verfärbter Sterne absieht — keine Beobachtungstatsache, die als direkter Hinweis auf die Existenz eines interstellaren Magnetfeldes zu deuten wäre [3]. Daß die Höhenstrahlung Anlaß dazu gegeben hat, solche Magnetfelder zu postulieren, beruht auf folgender Überlegung: Bekanntlich ist die Energiedichte der auf die Erde einfallenden Höhenstrahlung etwa gleich der Energiedichte des gesamten Sternlichtes (ohne Sonne), d. h. etwa das 100-fache der Energiedichte des Lichts sämtlicher außergalaktischer Systeme [3a]. Wenn die Höhenstrahlung *extragalaktischen* Ursprunges wäre, müßten also die extragalaktischen Objekte etwa $10^{+2}$-mal mehr Energie in Form von Höhenstrahlung als in Form von sichtbarem Licht emittieren, und dies scheint aus thermodynamischen Gründen als ganz unmöglich [4]. Ein galaktischer Ursprung ließ jedoch wegen der exzentrischen Stellung der Sonne einen beträchtlichen Sternzeitgang erwarten, der zwar oft behaup-

[1] Über unsere Ergebnisse haben wir auf der Physikertagung in Hamburg Ostern 1949 und auf der Astronomentagung in Bonn Herbst 1949 berichtet. Die Grundgedanken sind in einer früheren Arbeit bereits veröffentlicht (L. Biermann, Z. Naturforschg. **5a**, 65 [1950]).

[2] H. Alfvén, R. D. Richtmyer u. E. Teller, Physic. Rev. **75**, 892 [1949]; R. D. Richtmyer u. E. Teller, ib. **75**, 1729 [1949], H. Alfvén, ib. **75**, 1732 [1949].

[3] E. Fermi, Physic. Rev. **75**, 1169 [1949].

[3a] Vaucouleurs, Ann. d'Astrophysique **12**, 162 [1949]; Seares u. Mitarbb., Astrophysic. J. **62**, 320 [1925].

[4] Im Prinzip wird diese Schwierigkeit durch einen Vorschlag von Bagge umgangen (vgl. E. Bagge u. L. Biermann, Z. Naturforschg. **4a**, 303 [1949], nach dem wir noch von Quellen Höhenstrahlung empfangen, die so weit entfernt sind, daß sie wegen der Rotverschiebung praktisch nicht mehr sichtbar sind. Der große zu überbrückende Faktor macht jedoch extreme Annahmen über die Ergiebigkeit und Entfernung dieser Quellen notwendig.

tet, aber nie mit Sicherheit außerhalb der Fehlergrenze nachgewiesen worden ist[5]. Diese Isotropie läßt sich dann nur durch Ablenkungen der kosmischen Strahlung erklären, die kaum anders als durch Magnetfelder zustandekommen können. Gleichzeitig würden solche Magnetfelder eine Verdichtung der Höhenstrahlung bewirken, so daß die beobachtete Energiedichte von einer geringeren Produktion aufrechterhalten werden kann. Allerdings muß man, wenn die Ultrastrahlung praktisch nur auf Sternen primär entsteht (woran auch die Berücksichtigung des von Fermi diskutierten Nachbeschleunigungsmechanismus nichts Wesentliches ändert), dann immer noch annehmen, daß ein großer Teil der Sterne um eine Anzahl von Zehnerpotenzen stärker zur Ultrastrahlung beiträgt als die Sonne; aber das ist nicht unplausibel, wie Unsöld hervorgehoben hat[6], und es genügt, wenn ein kleiner Teil der gesamten Energieproduktion des Sterns in Form von Ultrastrahlung emittiert wird.

Damit ein interstellares Feld die Ultrastrahlung zusammenhalten kann, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

1. Es muß der Durchmesser des Larmor-Kreises der energiereichsten Teilchen klein gegen die Dicke der Milchstraße sein.

2. Die Energiedichte des Magnetfeldes muß vergleichbar der Energiedichte der Höhenstrahlung sein, sonst könnten die Maxwellschen Spannungen des interstellaren Magnetfeldes dem Druck der Höhenstrahlung nicht das Gleichgewicht halten, und das Feld würde zunächst am Rande der Galaxis einfach weggeschwemmt. Die beiden unteren Grenzen ergeben sich dann zahlenmäßig so:

a) Die größte beobachtete Energie eines Primärteilchens beträgt $10^{16}$ eV, der größte zulässige Larmor-Radius $\approx$ Dicke der Galaxis $10^3$ Lichtjahre $\approx 10^{21}$ cm. Damit folgt eine Mindestfeldstärke von $10^{-8}$ Gauß.

b) Die Energiedichte der auf die Erde einfallenden kosmischen Strahlung[7] ist etwa $10^{-12}$ erg cm$^{-3}$, ein Magnetfeld gleicher Energiedichte hat die Feldstärke $10^{-5.3}$ Gauß.

Die zweite untere Grenze liegt wesentlich höher, ist also maßgebend. Das Ziel dieser Untersuchung ist es, zu zeigen, daß aus bekannten Daten *deduktiv* die Existenz eines Magnetfeldes dieser Größenordnung begründet werden kann.

II. Der in den folgenden Ziffern genauer zu betrachtende Mechanismus der Entstehung interstellarer Magnetfelder läßt sich anschaulich etwa folgendermaßen beschreiben:

Die gasförmige interstellare Materie ist ein so guter Leiter, daß ein einmal vorhandenes Magnetfeld (auch verhältnismäßig kleiner Ausdehnung bzw. unregelmäßiger Struktur) selbst in kosmischen Zeiträumen durch Joulesche Verluste nicht merklich abklingt; es haftet (scheinbar) an der Materie und wird mit ihr bewegt. Die Bewegung des interstellaren Gases ist turbulent[8], und dies hat zwei Wirkungen. Einmal werden hierdurch schon vorhandene Feldlinien immer mehr auseinandergezupft und verlängert und dadurch die magnetische Feldstärke erhöht, zum andern werden durch die mit diesen Bewegungen verbundenen Beschleunigungen und durch die Kräfte, die diese Bewegungen veranlassen, Feldlinien erzeugt (und auch vernichtet), nach einem Prozeß, der im Prinzip dem von einem der Verf.[1] für die Entstehung stellarer Magnetfelder vorgeschlagenen gleicht. Die mittlere Feldstärke steigt wegen der Neuerzeugung und der Verwicklung der Feldlinien im großen betrachtet wesentlich exponentiell mit der Zeit an. Der Prozeß erreicht seine Grenze, wenn die Magnetfelder so stark zu werden beginnen, daß sie die Turbulenz, angefangen bei ihren kleinsten Elementen, unterdrükken. Die Milchstraße wäre hiernach etwa in dem Stadium, in dem die Turbulenzelemente der Größenordnung $10^2$ parsec affiziert werden, der normale turbulente Austausch in kleineren Dimensionen im allgemeinen also schon unterdrückt ist.

III. Wir machen uns für das Weitere folgendes Bild von dem interstellaren Gas: Es besteht entsprechend der kosmischen Elementhäufigkeit[9] im wesentlichen aus Wasserstoff, und zwar mit einer mittleren Dichte $N$ der Größenordnung 1 Teilchen pro cm$^3$, die allerdings örtlich erheblich davon abweicht. Es lassen sich verhältnismäßig scharf zweierlei Gebiete unterscheiden[10]: In der Nachbarschaft heißer Sterne (vor allem O- und B-Sterne) ist der interstellare Wasserstoff praktisch vollständig ionisiert, so daß das interstellare Gas in diesen sog. H II-Regionen ein ideales Plasma darstellt, auf das die früher dargestellten Überlegungen zur Dynamik eines Plasmas[11] ohne weiteres angewendet werden können. Die elektrische Leitfähigkeit ergibt

[5] Vgl. etwa E. Bagge, Ergebn. exakt. Naturwiss. **22**, 202 [1949].
[6] A. Unsöld, Nature [London] **163**, 489 [1949] u. Z. Astrophysik **26**, 176 [1949].
[7] Vgl. z. B. B. Rossi, Rev. mod. Physics **20**, 537 [1948], Table VI.
[8] Vgl. C. F. v. Weizsäcker, Z. Astrophysik **24**, 181 [1947] und Z. Naturforschg. **3a**, 524 [1948].
[9] A. Unsöld, Z. Astrophysik **21**, 22 [1941]; B. Strömgren, Festschrift für E. Strömgren, Kopenhagen 1940.
[10] B. Strömgren, Astrophysic. J. **89**, 526 [1939].
[11] A. Schlüter, Z. Naturforschg. **5a**, 72 [1950].

sich dort entsprechend der Elektronentemperatur von etwa $10^4$ Grad zu etwa $10^{13}$ elektrostatischen cgs-Einheiten [$\sec^{-1}$].

Die H II-Regionen dürften etwa $^1/_{20}$ des Volumens des interstellaren Gases ausmachen[12], während in den restlichen 95% der Wasserstoff praktisch gar nicht mehr ionisiert sein dürfte (H I-Regionen). Merklich ionisiert sind aber fast überall die Metalle und in weiten Bereichen auch der Kohlenstoff, so daß mit einem mittleren Ionisationsgrad von fast $10^{-3}$ gerechnet werden kann. Da bei den tiefen Elektronentemperaturen von etwa $10^{2,5} \ldots 10^{3,5}$ Grad die große Reichweite der Coulomb-Kräfte stark zur Geltung kommt, überwiegt die Wechselwirkung der geladenen Teilchen untereinander die der geladenen mit den ungeladenen auch bei dieser geringen Ionisation — der Wirkungsquerschnitt für den Stoß zweier einfach geladener Teilchen gegeneinander beträgt etwa $10^{-9} \ldots 10^{-10,5}$ cm$^2$, während er für den Stoß gegen neutrale Atome etwa $10^{-15}$ cm$^2$ ist (er mag allerdings durch Ramsauer-Effekt etwas erhöht sein). Es kann daher auch das interstellare Gas in H I-Regionen mit vernünftiger Näherung als Plasma betrachtet werden. Die elektrische Leitfähigkeit beträgt hier wegen der geringen Temperatur etwa $10^{10,5} \ldots 10^{12}$ sec$^{-1}$.

Auch diese Leitfähigkeit ist genügend, so daß wir für die folgenden Betrachtungen das interstellare Gas stets als unendlich guten Leiter ansehen können. In einem Plasma ist genau wie in einem Metall die Größenordnung der Abklingzeit $\tau$ eines Magnetfeldes infolge Ohmscher Verluste gegeben durch

$$\tau = L^2 \sigma / c^2 , \tag{1}$$

wobei $L$ eine für die Krümmung des Magnetfeldes charakteristische Länge darstellt. Setzen wir für $L$ den Wert $10^{20}$ cm ein und für $\sigma$ den Minimalwert $10^{10,5}$, so folgt bereits eine Abklingzeit der Größenordnung $10^{29,5}$ sec, d. h. etwa das $10^{12,5}$-fache des Weltalters. Noch kleiner ist unter den betrachteten Umständen die Wirkung des Beschleunigungswiderstandes des Stromes, der für die Deutung der Plasmaschwingungen von Wichtigkeit war. Wir werden ferner stets den Verschiebungsstrom vernachlässigen.

Mit diesen Vernachlässigungen, die physikalisch begründet sind und sich ihrerseits auch an den strengen Gleichungen der früheren Arbeit[11] verifizieren lassen, können wir die Gültigkeit der Behauptung über die Abklingzeit nachweisen. Es gelten dann in einem Plasma bei Abwesenheit eingeprägter elektromotorischer Kräfte (deren Wirkung wir sogleich gesondert betrachten werden) die Beziehungen

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4 \pi \mathfrak{j} \tag{2}$$

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{E}^{\mathrm{m}} = - D \mathfrak{H} \tag{3}$$

$$\mathfrak{j} = \sigma \mathfrak{E}^{\mathrm{m}} \tag{4}$$

($\mathfrak{j}$ = Stromdichte, $\mathfrak{E}^{\mathrm{m}}$ = elektrisches Feld im mit dem Plasma mitbewegten Koordinatensystem, $D \mathfrak{H}$ [Gauß sec$^{-1}$] = Änderung des Flusses von $\mathfrak{H}$ durch eine mit dem Plasma mitbewegte infinitesimale Fläche). Hierbei ist bemerkenswert, daß auch in einem beliebigen Magnetfeld für $\sigma$ der *normale* Wert der Leitfähigkeit einzusetzen ist. Die Elimination von $\mathfrak{E}^{\mathrm{m}}$ und $\mathfrak{j}$ ergibt dann

$$4 \pi \sigma D \mathfrak{H} = - c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{H} . \tag{5}$$

Mit den größenordnungsmäßigen Beziehungen $D \mathfrak{H} \approx \mathfrak{H}/\tau$ und rot ... $\approx 1/L$ folgt dann die oben gegebene Abschätzung.

Sowohl in den H I- als auch in den H II-Regionen wollen wir den Bewegungszustand des interstellaren Gases als den der statistischen isotropen Turbulenz ansehen, sofern keine Gebiete betrachtet werden, deren Ausdehnung vergleichbar mit der der gesamten Milchstraße sind. Aus der Turbulenztheorie folgt dann, daß das Mittel des Quadrates der Relativgeschwindigkeit ($V^2{}_L$) an zwei Punkten, die einen Abstand $L$ voneinander haben proportional zu $L^{2/3}$ ist. Die Konstante $V_L L^{-1/3}$, die wir $C$ nennen wollen, sei auf Grund der Beobachtungen der aus den interstellaren Absorptionslinien folgenden Radialgeschwindigkeiten zu $10^{-1}$ [cm$^{2/3}$ sec$^{-1}$] angenommen.

Ohne den im folgenden zu betrachtenden Einfluß der Magnetfelder würde das Spektrum der Turbulenz nach unten (kleine $L$) durch den Einfluß der molekularen Reibung begrenzt. Man würde ein kleinstes $L$ erwarten, das etwa ein bis zwei Größenordnungen über der freien Weglänge liegt. Es würde damit für H I-Regionen etwa $10^{16} \ldots 10^{17}$ cm und für H II-Regionen etwa $10^{13} \ldots 10^{14}$ cm folgen. Wir werden im folgenden (VIII) zeigen, daß in H II-Regionen die tatsächliche, durch das Magnetfeld bestimmte untere Grenze der Turbulenz bei etwa $10^{21}$ cm liegen sollte, d. h. von der Ausdehnung der H II-Regionen selbst wäre. Alle Bewegungen in kleineren Dimensionen sind vom Magnetfeld wesentlich affiziert, vor allem nicht mehr isotrop. In den H I-Regionen sind die Verhältnisse etwas weniger übersichtlich, da zwischen der Turbulenz des ionisierten und des nichtionisierten Gases unterschieden werden muß.

In den folgenden Ziffern IV—VIII werden wir zunächst an die H II-Regionen denken und in IX die

[12] Dieses Resultat ist noch nicht ganz in dem Grade gesichert, der wünschenswert wäre. Vgl. B. Strömgren, Astrophysic. J. **108**, 242 [1948] (besonders Abschn. VII).

Verhältnisse in den HI-Regionen gesondert untersuchen.

IV. Wir betrachten nunmehr die Prozesse der Erzeugung und Verwicklung der Kraftlinien im einzelnen. Zuerst erörtern wir noch einmal den schon früher[1] diskutierten Erzeugungsvorgang.

Bei einer starren Rotation eines durch gegenseitige Gravitation zusammengehaltenen Plasmahaufens (z. B. eines Sternes oder näherungsweise der Galaxis im ganzen) in Abwesenheit eines Magnetfeldes tritt eine gewisse (kleine) Ladungstrennung auf, da die gleiche Zentripetalbeschleunigung dieser Rotation wegen der verschiedenen Masse einer verschiedenen Kraft auf Elektronen und Ionen entspricht, und zwar in dem Sinne, daß die Ionen bevorzugt nach außen fliegen. Das heißt der Zentripetalbeschleunigung entspricht bei bestimmter Massendifferenz von Ionen und Elektronen eine bestimmte eingeprägte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}^e$. Die Größe der auftretenden Ladungstrennung ist dann dadurch bestimmt, daß die durch die entstehende Raumladung erzeugte Feldstärke gerade $\mathfrak{E}^e$ das Gleichgewicht hält.

Ein solches Gleichgewicht ist bei starrer Rotation sicher immer möglich, weil hierbei das Vektorfeld der Beschleunigung und damit auch das von $\mathfrak{E}^e$ wirbelfrei ist und durch ein elektrostatisches Feld kompensiert werden kann. Bei beliebiger nichtstarrer Rotation wird aber rot $\mathfrak{E}^e$ i. allg. nicht verschwinden, $\mathfrak{E}^e$ kann dann durch das Feld einer Raumladung nicht mehr kompensiert werden und es beginnt ein elektrischer Strom zu fließen. In der früheren Arbeit war die stationäre Lösung des Problems für das Sterninnere betrachtet worden, bei der die Stromdichte aus der Leitfähigkeit folgt. Unsere Abschätzung der Zeitkonstante hat gezeigt, daß dieser Zustand im interstellaren Medium überhaupt nicht erreicht werden kann — auch dann nicht, wenn man statt der Lebensdauer der Turbulenzelemente das Alter der Welt zulassen würde[13].

Man kommt zu übersichtlichen Aussagen, wenn man nicht die lokale Änderung des Magnetfeldes, sondern die Änderung des magnetischen Flusses durch eine (infinitesimale) mit dem Plasma konvektiv mitbewegte und mitverzerrte Fläche betrachtet. Wenn wir diese Flußänderung pro Flächen- und Zeiteinheit wie oben mit $D\mathfrak{H}$ [Gauß sec$^{-1}$] bezeichnen, gilt nach[11] Gl. (13 a).

$$D\mathfrak{H} = c \operatorname{rot} \mathfrak{E}^e \quad (\sigma \approx \infty). \tag{6}$$

Hierbei ist die Wirkung der Ohmschen Verluste und der Strombeschleunigung vernachlässigt, die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Bewegung aber exakt berücksichtigt, wenn man $\mathfrak{E}^e$ definiert durch

$$e\,\mathfrak{E}^e = \frac{m_i\,\mathfrak{K}_i - m_e\,\mathfrak{K}_e}{m_i + m_e} - (m_i - m_e)\,\frac{d}{dt}\,\mathfrak{V}. \tag{7}$$

[Gl. (4)] $m_i$ ist die Ionenmasse (es wird angenommen, daß praktisch nur eine Sorte Ionen vorhanden ist), $m_e$ die Elektronenmasse, $\mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{K}_e$ die Kräfte (einschließlich Druckgradient, aber ohne Lorentz-Kraft) auf Ion bzw. Elektron, $d\mathfrak{V}/dt$ ist (mit einer hier ganz unerheblichen kleinen Abweichung) die substantielle Beschleunigung der makroskopischen Plasmabewegung. Wenn in der Bewegungsgleichung keine Lorentz-Kraft auftritt, also z. B. dann, wenn das Magnetfeld vernachlässigbar schwach ist, hebt sich ein Teil der Glieder der rechten Seite und es kann einfach geschrieben werden:

$$e\,\mathfrak{E}^e = \frac{m_e\,\mathfrak{K}_i - m_i\,\mathfrak{K}_e}{m_i + m_e}. \tag{8}$$

Gravitationskräfte leisten zu diesem Ausdruck keinen Beitrag; setzt man die Druckgradienten ein, so folgt wegen des Massenverhältnisses $m_i : m_e \gg 1$

$$e\,\mathfrak{E}^e \approx \frac{1}{N_e} \operatorname{grad} p_e. \tag{9}$$

Dieser Ausdruck kann von $1/N_i \operatorname{grad} p_i$ nur im Verhältnis Elektronen- zu Ionentemperatur verschieden sein und kann innerhalb dieser Genauigkeit wegen der Bewegungsgleichung durch

$$m_i \frac{d}{dt} \mathfrak{V}$$

ersetzt werden. Die Größe der substantiellen Beschleunigung ist nun für ein Turbulenzelement der linearen Ausdehnung $L$ und der zugehörigen Geschwindigkeit $V_L$ von der Ordnung $V^2_L L^{-1}$. Die Krümmung der Feldlinien des eingeprägten Feldes wird von der Ordnung $L^{-1}$ sein und der wirbelbehaftete Teil von derselben Größenordnung wie das ganze Feld, so daß schließlich für die Ordnung von $D\mathfrak{H}$, die zu dieser Turbulenzordnung gehört, folgt:

$$|D\mathfrak{H}|_L \approx \frac{c m_i}{e} V_L^2 L^{-2} \tag{10}$$

[13] Während sich im Stern Schwerkraft und Druckgradient annähernd kompensieren, spielt im interstellaren Raum die von einem Turbulenzelement herrührende Schwerebeschleunigung keine Rolle gegen die substantiellen Beschleunigungen, welche durch die Turbulenz selbst auftreten und mit den Druckgradienten im Gleichgewicht sind.

oder mit Benutzung des Spektralgesetzes der Turbulenz:

$$| D\mathfrak{H} |_L \approx \frac{c m_i}{e} C^2 L^{-4/3}. \tag{11}$$

Die kleineren Turbulenzelemente liefern also die schnellere Feldlinienerzeugung; für $L = 10^{16,5}$ cm ergibt sich zahlenmäßig unter Benutzung der Protonenmasse für $m_i$:

$$D\mathfrak{H} \approx 10^{-25} \text{ Gauss sec}^{-1}.$$

V. Von diesem Ergebnis benutzen wir zunächst die Tatsache, daß die Änderung des Flusses durch eine mitbewegte Fläche außerordentlich klein ist, so klein, daß wir sie jetzt zur Betrachtung der Frage, was aus einem in einem Plasma vorhandenen Magnetfeld durch eine vorgegebene turbulente Bewegung wird, gleich Null setzen können. Wir nehmen als durchsichtiges Modell an, daß das ganze magnetische Feld aus einem ringförmigen Bündel von Feldlinien besteht. Wegen der praktisch erfüllten Bedingung $D\mathfrak{H} = 0$ bleibt die Zahl der Feldlinien durch jeden (mitbewegten) Querschnitt, z. B. den in Abb. 1 eingezeichneten, bei jeder Bewegung konstant. Verläuft die Bewegung so, daß der betrachtete Ring dabei verlängert wird — das ist fast ganz sicher, wenn er sich in einem turbulenten Medium befindet — und verhält das Plasma sich praktisch, d. h. im Mittel über lange Zeiten inkompressibel, so nimmt die Größe des Querschnittes $Q$ umgekehrt proportional zur Länge $l$ des Umfanges des Ringes ab. Da die Zahl der Feldlinien durch den Querschnitt konstant bleibt, wächst die magnetische Feldstärke (= Feldliniendichte) proportional zur Verlängerung. Dieser Effekt tritt ähnlich bei jedem Feld auf, gleichgültig, ob es durch den oben betrachteten Wirbelmechanismus im Plasma selbst erzeugt ist oder irgendwo anders herstammt (X). Stets werden die Feldlinien durch die turbulente Bewegung auseinandergezupft und die Feldstärke proportional zur Verlängerung erhöht, da die Bewegung zu keinen dauernden Dichteänderungen führt.

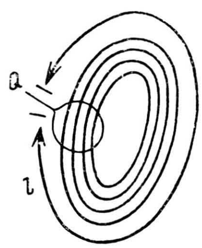


Abb. 1.

Die Geschwindigkeit der Verlängerung einer mit dem turbulenten Medium verbundenen Feldlinie kann so abgeschätzt werden: Zunächst weiß man, daß die kleinsten existierenden Turbulenzelemente am meisten beitragen, da deren Bewegung die schnellste Relativbewegung benachbarter Materieteile, auf die man die ganze Verlängerung ja zurückführen kann, hervorruft. Wir betrachten nun ein Feldlinienstück, das eine Länge von der Ordnung der linearen Dimension dieser Elemente habe. Das wahrscheinlichste Ergebnis der turbulenten Bewegung nach Ablauf der Lebensdauer des betrachteten Elementes ist dann eine Verlängerung dieser Linie um einen Betrag der Ordnung $L$, denn nach der schon von Prandtl angegebenen Beziehung ist die Lebensdauer $T$ eines Turbulenzelementes gerade etwa gleich der Zeit, in der die Relativbewegung der Teile des Turbulenzelementes seine lineare Ausdehnung erreicht. Wir erwarten also ein exponentielles Anwachsen der Länge einer Feldlinie und damit der Feldstärke mit einer durch die Lebensdauer der kleinsten Turbulenzelemente gegebenen Zeitskala etwa in der Form

$$\overline{|\mathrm{H}|} \sim e^{\alpha\, t/T}, \tag{12}$$

wobei $\alpha$ eine (positive) Zahl der Ordnung 1 bedeutet[14].

Die Energiebilanz kommt bei diesem Verwicklungsprozeß dadurch in Ordnung, daß längs jeder Feldlinie der Maxwellsche Zug wirkt, gegen den bei der Verlängerung Arbeit geleistet werden muß. Dieser Punkt wird gemeinsam mit der Frage der Rückwirkung der Magnetfelder auf die Turbulenz in VIII näher diskutiert werden.

VI. Die eben betrachtete Verwicklung der Feldlinien erweckt den Verdacht einer zu materiellen Vorstellung der Feldlinien. Es ist bekannt, daß diese Auffassung bei den vor 50 Jahren viel diskutierten Problemen der Unipolarinduktion zu scheinbaren Paradoxien führt[15]. Die Feldlinien haben gewissermaßen keine Identität, und eine Bewegung mit homogenem Geschwindigkeitsfeld führt in einem homogenen Magnetfeld trivialerweise zu gar keinem Effekt auf das Magnetfeld. Allgemein folgt aus der

[14] Wir hatten ursprünglich geglaubt, ein Anwachsen mit einer Potenz der Zeit begründen zu können, haben jedoch unsere Argumente revidiert auf eine Bemerkung von Hrn. G. K. Batchelor (Cambridge) hin, die dieser auf der Pariser Tagung für kosmische Gasdynamik (August 1949) gemacht hatte und die uns Herr v. Weizsäcker übermittelte.

[15] Vgl. hierzu z. B. Abraham-Becker, Theorie der Elektrizität, Bd. II, Teubner, Leipzig 1933.

Identität

$$D\mathfrak{H} \equiv \partial\mathfrak{H}/\partial t - \mathrm{rot}\,[\mathfrak{V}\mathfrak{H}] \quad (\mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0) \tag{13}$$

und $D\mathfrak{H} = 0$, daß auch die lokale Änderung $\partial\mathfrak{H}/\partial t$ verschwindet, wenn $[\mathfrak{V}\mathfrak{H}]$ ein Potential besitzt. Das wird in dem interessierenden Fall eines turbulenten Geschwindigkeitsfeldes und eines ebenfalls recht „turbulenten" Magnetfeldes sicher i. allg. nicht erfüllt sein.

Trotzdem ist es vielleicht nicht überflüssig, die Auseinanderziehung eines homogenen Magnetfeldes durch ein inhomogenes Geschwindigkeitsfeld an einem Beispiel zu betrachten. Das Geschwindigkeitsfeld sei das in der Abb. 2 durch die Länge der Pfeile angedeutete und das Magnetfeld homogen senkrecht hierzu. Da durch eine ursprünglich senkrecht zum Geschwindigkeitsfelde liegende Fläche dauernd kein Fluß hindurchtritt, diese Fläche sich aber wegen des

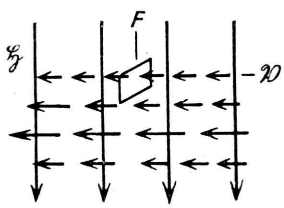


Abb. 2

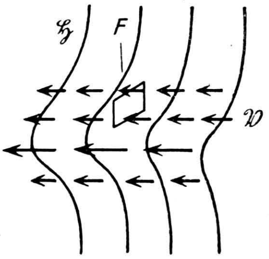


Abb. 3

Geschwindigkeitsgradienten verformt, folgt, daß das Magnetfeld nach einiger Zeit sich entsprechend der Abb. 3 verformt haben muß. Diese Überlegung ist äquivalent einer Betrachtung der induzierten elektromotorischen Kräfte und des durch sie erzeugten sekundären Magnetfeldes.

VII. Wir betrachten nun das Zusammenwirken der einzelnen Effekte.

Die Turbulenzelemente der Größe $L$ erzeugen größenordnungsmäßig pro cm² und sec Feldlinien gemäß:

$$|D\mathfrak{H}|_L = \frac{c m_i}{e} V_L^2 L^{-2}. \tag{14}$$

Während ihrer Lebensdauer, die der Zeit entspricht, die sie brauchen, um ihren eigenen Durchmesser zu durchlaufen, verläuft dieser Prozeß im wesentlichen im selben Sinne, so daß während der Lebensdauer Feldlinien pro cm² erzeugt werden nach:

$$\frac{c m_i}{e} V_L L^{-1}. \tag{15}$$

Mit diesem Felde startet dann der Verwirbelungsprozeß. Da dieser sehr wirksam ist und größenordnungsmäßig eine Verdopplung der Feldstärke während einer Lebensdauer bringt, tragen alle später erzeugten Feldlinien zusammen praktisch höchstens nochmal soviel bei, so daß wir so rechnen können, als ob zunächst während der ersten Lebensdauer nur der Erzeugungsprozeß und danach nur der Verwirbelungsprozeß gelaufen sei; für das heutige Magnetfeld muß also gelten, wenn man die seit dem Beginn des gesamten Prozesses verstrichene Zeit mit $A$ ($\approx$ Alter der Milchstraße $\approx 10^{17}$ sec) bezeichnet:

$$\overline{H(A)} \approx \frac{c m_i}{e} \frac{V}{L} e^{\alpha A/T}, \qquad T \approx L V. \tag{16}$$

Die Begründung des im Mittel einsinnigen Anwachsens des Magnetfeldes führt auf ein Paradoxon, wenn man die Richtung des Zeitablaufes umkehrt. Mit genau derselben Argumentation wird man dann auf eine exponentielle Abnahme des Magnetfeldes geführt. Wir klären dies durch Betrachtung eines ganz analogen Falls in der kinetischen Gastheorie: Gegeben sei ein großes, mit Gas gefülltes Gefäß. Wir betrachten nun ein bestimmtes Gasmolekül, das sich zu einer bestimmten Zeit $t$ gerade in einem gewissen kleinen Abstand (klein gegen die linearen Gefäßdimensionen) von einem festen Punkte befinden möge. Der Abstand desselben Gasteilchens von demselben festen Punkte wird wahrscheinlich zu jedem späteren Zeitpunkte größer sein, und zwar ist der wahrscheinliche Abstand um so größer, je später die Messung erfolgt — er nähert sich asymptotisch einem durch die Gefäßgeometrie gegebenen Werte. In einem unendlich großen Gefäße ist also der Abstand jedes Gasteilchens von jedem festen Punkte eine im Mittel monoton zunehmende Funktion der Zeit. Die Umkehrung der Zeitrichtung liefert hier die offenbar genau so richtige Aussage: Der wahrscheinliche Abstand eines Gasteilchens von einem festen Punkte in einem merklich großen Gefäße, dessen Abstand zu einer gewissen Zeit einen gewissen Betrag hat, war zu jeder früheren Zeit größer (und wird es auch zu jeder späteren wieder sein).

Die Länge einer in ein turbulentes Medium eingebetteten und von ihm mitbewegten Linie zeigt nun genau das statistische Verhalten des betrachteten Abstandes im unendlich großen Gefäß: Die Länge eines Linienstückes, die zu einer bestimmten Zeit gemessen sei, ist zu jeder späteren Zeit wahrscheinlich größer. Die durch Umkehr der Zeitrichtung entstehende Aussage, daß sie auch zu jedem früheren Zeitpunkte wahrscheinlich größer gewesen sei, ist bei der Anwendung auf die Feldlinien des Magnetfeldes sinnlos, da wir ja ausdrücklich den Fall betrachten, daß ursprünglich nur ein sehr kleines (durch die eingeprägten Kräfte erzeugtes) Magnetfeld vorhanden gewesen sei, und da wir durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über etwas, das wir wissen, nichts Neues erfahren können.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, daß innerhalb eines vorgegebenen Volumens $V$ nicht mehr als (größenordnungsmäßig) $V/\varnothing^3$ Windungen vom Krümmungsradius $\varnothing/2$ der angenommenen Feldlinienzahl Platz hätten, wodurch dem Auseinanderziehen der magnetischen Kraftlinien gewissermaßen geometrische Schranken gesetzt wären. Daß dem nicht so ist, erkennt man am einfachsten am Beispiel einer eng gewickelten Spule, welche von einem Stück des betrachteten Kraftlinienbündels gebildet werden möge; die Feldliniendichte kann bei hinreichend enger Wicklung beliebig hoch werden. Dies Modell entspricht qualitativ der Verzerrung einer magnetischen Kraftlinie durch Wirbel, deren Achse nicht gerade parallel zu ihr ist.

Statt der anschaulichen, aber nicht strengen Betrachtungsweise, bei der der Begriff der „Zahl der Feldlinien" ausschlaggebend ist, gehen wir jetzt zu einer differentiellen Beschreibung des Verwirbelungsprozesses über:

Aus der in sehr guter Näherung gültigen Gleichung [vgl. Gl. (6)]

$$D\mathfrak{H} \equiv \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}\,[\mathfrak{V}\,\mathfrak{H}] = 0 \tag{17}$$

folgt durch einfache Vektorumformung für die substantielle Änderung von $\mathfrak{H}$:

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + (\mathfrak{V}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{V} - \mathfrak{H}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{V}\,. \tag{18}$$

Diese Beziehung ist also nur ein anderer Ausdruck für das vollständige Haften der Feldlinien an der bewegten Materie. Eine Änderung der magnetischen Feldstärke in einem bestimmten Materiestück tritt also nur durch den Gradiententensor des Geschwindigkeitsfeldes auf, dessen rechtwinklige Komponenten $\partial V_i/\partial x_k$ sind. Dabei bewirken die rotatorischen Teile nur eine Drehung, aber keine Betragsänderung des Magnetfeldes; wenn nämlich $\partial V_i/\partial x_k = -\partial V_i/\partial x_k$, kann die Gl. (18) auch geschrieben werden

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = [\mathfrak{H}\,\operatorname{rot}\,\mathfrak{V}]\,, \tag{19}$$

und durch innere Multiplikation mit $\mathfrak{H}$ folgt sofort $d\mathfrak{H}^2/dt = 0$.

Wir können uns daher auf die Betrachtung der Wirkung eines symmetrischen Gradiententensors beschränken und uns in jedem (mitbewegten) Punkte in jedem Augenblick ein solches kartesisches Koordinatensystem eingeführt denken, in dem der Tensor in Hauptachsenform dargestellt wird, so daß z. B. für die erste Komponente folgt

$$\frac{dH_1}{dt} = H_1\,\frac{\partial V_1}{\partial x_1}\,. \tag{20}$$

Bei der Integration dieser Gleichung ist aber zu beachten, daß das Koordinatensystem sich dauernd dreht entsprechend den Hauptachsen des symmetrischen Teils des Gradiententensors. Für die folgenden Abschätzungen kann dies kaum einen systematischen Fehler bringen, da dabei der Betrag des Magnetfeldes nicht affiziert wird; wir können darüber hinaus aber auf jeden Fall annehmen, daß mindestens während einer Zeit, die kürzer ist als die Lebensdauer des kleinsten Turbulenzelements, für einen mitbewegten Beobachter keine wesentlichen Verdrehungen der Hauptachsen eintreten. Wir können das Gleichungssystem dann ohne weiteres integrieren und erhalten

$$H_1(t) = H_1(\tau)\exp\left\{\int\limits_{t'=\tau}^{t'=t} \frac{\partial V_1(t')}{\partial x_1}\,dt'\right\}. \tag{21}$$

In dem hier betrachteten Falle, daß das Magnetfeld auf den Bewegungszustand nicht merklich rückwirkt (Z. VIII), ist es sicher gleich wahrscheinlich, daß das Vorzeichen des Klammerausdruckes positiv oder negativ ist. Indem wir die entsprechenden Glieder mit positivem und negativem Exponenten zusammenfassen, können wir im Mittel schreiben:

$$\overline{H_1(t)} = \mathrm{H}_1(\tau)\,\overline{\mathfrak{Cof}\left\{\int\limits_{t'=\tau}^{t'=t} \frac{\partial V_1(t')}{\partial x_1}\,dt'\right\}}. \tag{22}$$

Das Mittel über den hyperbolischen Kosinus kann nun so abgeschätzt werden: Während der Lebensdauer der kleinsten Turbulenzelemente (lineare Ausdehnung $L$, Geschwindigkeit $V$) ist $\partial V_1/\partial x_1$ praktisch konstant und von der Ordnung $V/L$. Die Lebensdauer selbst ist gegeben durch $T = \alpha' L/V$, wobei $\alpha'$ eine reine Zahl von der Ordnung 1 darstellt, so daß folgt

$$H_1(t+T) = H_1(t)\,\mathfrak{Cof}\,\alpha' \approx H_1(t)\,e^{\alpha'}/2\,. \tag{23}$$

Da diese Beziehung für alle drei Komponenten des Magnetfeldes einzeln gilt, gilt sie auch für den Betrag $H$. Im Mittel über Zeiten $\gg T$ ergibt sich

$$H(t) \approx H(\tau) \exp\left(\frac{t-\tau}{T} \operatorname{Cos} \alpha'\right), \quad (t-\tau \gg T), \tag{24}$$

da der Beitrag der größeren Turbulenzelemente wegen ihrer größeren Lebensdauer erheblich kleiner ist.

Aus $D\mathfrak{H} = 0$ kann nicht deduziert werden, daß im bewegten Medium die Zahl der im Gesamtvolumen enthaltenen magnetischen Kraftlinien konstant wäre, die man sich in jedem Moment etwa aus einer Anzahl von in sich geschlossenen Kraftlinienbündeln gebildet vorstellen wird. Nur wenn die Anzahl dieser Bündel konstant bliebe und sie sich nicht untereinander vermischen würden, könnte man bildlich von einer konstant bleibenden Kraftlinienzahl sprechen. Tatsächlich werden sich aber die Zusammenhangsverhältnisse und damit die Kraftlinienzahl in einem turbulenten Plasma ständig in verwickelter Weise ändern.

Wir wollen das Anwachsen noch an einem Modell untersuchen, das analytisch durchsichtiger ist und auch eine Berücksichtigung der eingeprägten Kräfte erlaubt, dafür aber noch stärker vereinfacht ist. In der Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = (\mathfrak{H} \operatorname{grad}) \mathfrak{V} - \mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{V} + c \operatorname{rot} \mathfrak{E}^e \tag{25}$$

setzen wir an

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0\, e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r})}; \quad \mathfrak{E}^e = \mathfrak{E}_0^e\, e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r})}. \qquad (26)\ (27)$$

wobei $\mathfrak{V}_0$ und $\mathfrak{E}_0^e$ während einer Lebensdauer $T$ der kleinsten Turbulenzelemente konstant sei und danach einen neuen Wert annehmen sollen, der mit dem vorhergehenden nicht korreliert sei. Der Betrag von $\mathfrak{k}$ sei $k = 2\pi/L$. Gemeint sind immer die Realteile.

Gl. (25) schreibt sich dann mit $\mathfrak{K} = i\,\mathfrak{k}\, e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r})}$

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = (\mathfrak{H}\,\mathfrak{K})\,\mathfrak{V}_0 - \mathfrak{H}\,(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0) + c\,[\mathfrak{K}\,\mathfrak{E}_0^e]\,. \tag{28}$$

Die Meinung des Ansatzes ist, daß die Ableitungen durch die Ausdrücke vernünftig dargestellt werden, d. h. daß der periodische Ansatz die Nahordnung einigermaßen repräsentiert. Gl. (28) läßt sich nun geschlossen integrieren. Es folgt

$$\mathfrak{H}(t) = \frac{1}{(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)} \Big\{ \big[(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)\,\mathfrak{H}^0 - c\,[\mathfrak{K}\,\mathfrak{E}_0^e] - (\mathfrak{K}\,\mathfrak{H}^0)\,\mathfrak{V}_0\big]$$
$$\exp\big[-c\,\{(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)\,t\}\big] + (\mathfrak{K}\,\mathfrak{H}^0)\,\mathfrak{V}_0 + c\,[\mathfrak{K}\,\mathfrak{E}_0^e]\Big\}, \tag{29}$$

wenn die Zeit $t$ von Beginn der Lebensdauer des Turbulenzelementes an gerechnet wird und $\mathfrak{H}^0$ den Wert von $\mathfrak{H}$ für $t = 0$ bedeutet. Hieraus erhält man den Erwartungswert von $\mathfrak{H}^2$ nach Ablauf der Zeit $T$, wenn man Glieder, die in $\mathfrak{H}^0$, $\mathfrak{V}_0$ oder $\mathfrak{E}_0^e$ linear sind, wegläßt, da sie im Mittel nichts beitragen:

$$\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}^{0^2} = \frac{1}{(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)^2} \Big\{ \big[(\mathfrak{K}\,\mathfrak{H}^0)\,\mathfrak{V}_0^2 + c^2\,[\mathfrak{K}\,\mathfrak{E}_0^e]^2\big]$$
$$\big[1 - 2\,e^{-(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)\,T} + e^{-2(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)\,T}\big]$$
$$- \big[(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)^2\,\mathfrak{H}^{0^2}\big]\big[1 - e^{-2(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)\,T}\big]\Big\} \tag{30}$$

$$= \big[(\mathfrak{K}\,\mathfrak{H}^0)\,\mathfrak{V}_0^2\,T^2 + c^2\,[\mathfrak{K}\,\mathfrak{E}_0^e]^2\big]\,T^2 + 2\,(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)^2\,\mathfrak{H}^{0^2}\,T^2$$
$$+ (\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)^2\,T^4\,\{\ldots\} + \text{höhere Potenzen}\,, \tag{31}$$

wobei in den Exponenten und vor dem Quadrieren für die komplexen Größen ihr Realteil einzusetzen ist. Mittelung über alle gegenseitigen Orientierungen von $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{H}_0$ bzw. $\mathfrak{E}_0^e$ und $\mathfrak{k}$ ergibt

$$\overline{(\mathfrak{K}\,\mathfrak{H}^0)^2} = \frac{4\pi^2}{3}\,\frac{H_0^2}{L^2} \quad \text{bzw.} \quad \overline{[\mathfrak{E}_0^e]^2} = \frac{8\pi^2}{3}\,\frac{\overline{(\mathfrak{E}^e)^2}}{L^2}\,. \tag{32}$$

Das Glied mit $(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)^2$ liefert nur im kompressiblen Fall einen Beitrag. Unter der Annahme, daß alle Winkel zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{V}_0$ gleich wahrscheinlich seien, folgt

$$\overline{(\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}_0)^2} = \frac{4\pi^2}{3}\,\overline{V^2}\,(\text{„vollständig kompressibel“})\,. \tag{33}$$

Es folgt also für die Zunahme während der Lebensdauer der kleinsten Turbulenzelemente im Mittel

$$\overline{\Delta H^2} = \frac{(3)}{3}\,4\pi^2\,\frac{V^2\,T^2}{L^2}\,H^2 + \frac{2\cdot 4\pi^2 c^2}{3}\,\frac{T^2}{L^2}\,\overline{\mathfrak{E}^{e_2}} \tag{34}$$

oder integriert vom Zeitpunkt der Entstehung der ersten Feldlinien an bis zum Weltalter $A$

$$\overline{H^2(A)} = \frac{2\,c^2}{(3)\cdot 1}\,\frac{\mathfrak{E}^{e_2}}{V^2}\left\{\exp\left[\frac{(3)\,4\pi^2}{3}\,\frac{V^2\,T}{L^2}\,A\right] - 1\right\}, \tag{35}$$

wodurch unser anschaulich abgeleitetes Resultat eine Stütze hält.

VIII. Bei den bisher vorgeführten Überlegungen war angenommen, daß die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Bewegung zu vernachlässigen sei. Das ist dann nicht mehr der Fall, wenn die Maxwellschen Spannungen des Magnetfeldes vergleichbar werden dem Turbulenzdruck. In einem Magnetfeld ist die Größe der Spannungen gegeben durch die Dichte der magnetischen Energie $\mathfrak{H}^2/8\pi$, während der Turbulenzdruck gegeben ist durch die Energiedichte der Turbulenz. Es folgt also das einleuchtende Ergebnis, daß das Magnetfeld dann die Bewegung, d. h. die Turbulenz, wesentlich beeinflußt, wenn seine Energiedichte die der Turbulenz erreicht. Der Mechanismus der Beeinflussung besteht darin, daß dann den geladenen Teilchen praktisch nur noch eine Bewegung entlang der magnetischen Feldlinien oder, mikroskopisch betrachtet, nur noch in Larmor-Kreisen und -Spiralen um diese herum möglich ist.

In einem rein magnetostatischen Falle bestehen die Maxwellschen Spannungen streng aus einem Druck quer zu den Feldlinien und einem Längszug, deren Größe gleich der Energiedichte des Feldes ist. In einem Koordinatensystem, das mit dem Plasma mitbewegt wird, ist das Feld praktisch rein magnetostatisch. Die Größenordnung der mitbewegt gemessenen elektrischen Felder können wir so abschätzen: Es fließen trotz der als unendlich groß zu betrachtenden Leitfähigkeit nur endliche Ströme; das ist nur möglich, wenn das eingeprägte Feld $\mathfrak{E}^e$ und das wahre elektrische Feld sich gerade kompensieren. Die Stärke des ersten haben wir oben berechnet, Einsetzen der Zahlwerte liefert etwa $\mathfrak{E} \approx 10^{-21}$ el.stat. Einheiten, so groß ist also auch das mitbewegte elektrische Feld. Die zugehörige Energiedichte beträgt dann $10^{-43}$ erg cm$^{-3}$ und ist also in der Tat neben dem magnetischen Felde völlig belanglos.

Daß diese Spannungen identisch mit der Wirkung der Lorentz-Kraft

$$\mathfrak{k} = \left[\frac{\mathfrak{j}}{c}\,\mathfrak{H}\right] = \frac{-1}{4\pi}\,[\mathfrak{H}\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{H}]$$

$$= \frac{-1}{8\pi}\,\nabla\,\mathfrak{H}^2 - \frac{1}{4\pi}\,(\mathfrak{H}\ \mathrm{grad})\,\mathfrak{H} \tag{36}$$

ist, läßt sich in einigen einfachen Fällen leicht veranschaulichen. Für ein gerades kreissymmetrisches Bündel von Feldlinien — Seele $z$, Abstand von der Seele $r$, Azimut um dieselbe $\alpha$ — gilt

$$|\,\mathrm{rot}\ \mathfrak{H}\,| = -\frac{\partial H_z}{\partial r} \qquad \text{(nur } \alpha\text{-Komponente)} \tag{37}$$

$$\mathfrak{k} = \frac{-1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{H}^2 \qquad \text{(nur } r\text{-Komponente)}\,. \tag{38}$$

$\mathfrak{k}$ muß im stationären Fall durch einen Druckgradienten genau kompensiert werden. Denkt man sich das Bündel etwa durch einen Überdruck isotherm komprimiert, so geht die geleistete Arbeit quantitativ in magnetische Feldenergie über, da, wie wir gesehen haben, praktisch keine Jouleschen Verluste auftreten.

Denkt man sich das Bündel in einen Kreis von großem Radius im Vergleich zum Bündeldurchmesser zusammengebogen, so erhält man ein Feldlinienbild, das der Abb. 1 entspricht. Es tritt dann eine einwärts gerichtete Kraftkomponente auf, welche von dem Maxwellschen Zug längs der Feldlinien herrührt. Um dies zu sehen, wählen wir jetzt die Achse des (großen) Kreises als $z$-Achse und nennen den Abstand von ihm $r$, das Azimut wieder $\alpha$. Dann gilt

$$-4\pi\mathfrak{k} = \begin{Bmatrix} H_\alpha\left(\dfrac{\partial H_\alpha}{\partial r} + \dfrac{H_\alpha}{r}\right) \\ 0 \\ H_\alpha\,\dfrac{H_\alpha}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\,\nabla\,\mathfrak{H}^2 - (\mathfrak{H}\ \mathrm{grad})\,\mathfrak{H}\,.$$

Das Glied $(\mathfrak{H}\ \mathrm{grad})\,\mathfrak{H} = H_\alpha^2/r$ (nur $r$-Komponente) bewirkt die erwähnte, zur $z$-Achse hin gerichtete Kraft, die allerdings wegen der Ortsabhängigkeit von $\mathfrak{H}$ nicht mehr wirbelfrei ist und daher nicht mehr allein durch einen zur $z$-Achse hin gerichteten Druckgradienten kompensiert werden kann.

Man kann auch allgemein die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Turbulenz über den Lorentz-Term in der Bewegungsgleichung des Plasmas diskutieren. Man geht von den Gleichungen:

$$N\,m\,\frac{d}{dt}\,\mathfrak{V} = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{j}\,\mathfrak{H}] + N\,\mathfrak{K}$$

und

$$c\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{H} = 4\pi\,\mathfrak{j} \quad \text{aus,}$$

wobei $N\mathfrak{K}$ die gesamte nichtmagnetische Kraft auf ein Volumenelement und $\mathfrak{j}$ die elektrische Stromdichte bedeuten. Das Magnetfeld beginnt nun etwa dann wirksam zu werden, wenn $[\mathfrak{j}\,\mathfrak{H}] \approx N\mathfrak{K}$, d. h. $\approx N\,m\,d/dt\,\mathfrak{V}$. Das Verhältnis von $\mathfrak{j}$ zu $\mathfrak{H}$ kann aus der zweiten Gleichung erschlossen werden, da in einem Turbulenzelement der Ordnung $L$ der Größenordnung nach gelten muß:

$$\frac{c}{L}\,|\,\mathfrak{H}\,| = 4\pi\,|\,\mathfrak{j}\,|\,,$$

dies in die erste Abschätzung eingeführt, ergibt

$$\frac{1}{L}\,\frac{\mathfrak{H}^2}{4\pi} \approx N\,m\,\frac{d}{dt}\,\mathfrak{V}\,,$$

was mit dem früheren Ergebnis identisch ist, wenn man die Beschleunigung durch die charakteristische Zeit der betreffenden Turbulenzordnung abschätzt.

Wenn die magnetische Energiedichte die der Turbulenz unterster Stufe erreicht hat, kann diese letztere die magnetischen Feldlinien nicht mehr auseinanderziehen. Die Turbulenz der höheren Stufen wird dann aber noch nicht merklich affiziert, da beim Mitteln über größere Volumina $(1/4\pi)\ \overline{[\mathfrak{H}\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{H}]}$ unter diesen Umständen in der hydrodynamischen Gleichung ganz zurücktritt. Daher werden die magnetischen Kraftlinien durch die Turbulenz *der* höheren Stufen weiter auseinandergezogen, deren Energiedichte noch größer als die magnetische Energiedichte ist.

Die Energiedichte der Turbulenzelemente der Ordnung $L$ beträgt nun

$$N\,\frac{m}{2}\,V_L{}^2 = N\,\frac{m}{2}\,C^2\,L^{2/3}\,,$$

wenn $N\,m$ die Massendichte des interstellaren Gases bedeutet; setzen wir diese zu etwa $10^{-23.5}$ g cm$^{-3}$, so würde für Turbulenzelemente mit $L = 10^{13.5}$ cm, also $V_L \approx 10^{4.5}$ cm sec$^{-1}$, eine Energiedichte von etwa $10^{-15}$ erg cm$^{-3}$ folgen. Das von einem solchen Turbulenzelement während seiner Lebensdauer erzeugte Magnetfeld würde etwa $10^{-13}$ Gauß betragen, während der Verwicklungsfaktor $\approx e^{10^8}$ wäre, so daß ein Magnetfeld von ganz unvernünftiger Stärke entstanden sein müßte. D. h. aber, die Turbulenz dieser Ordnung ist bereits in der Weise verändert, daß keine weitere Verstärkung des Magnetfeldes eintritt.

Wir haben also folgendes Bild. Die Turbulenz in den kleinsten Dimensionen $L$ ist nicht mehr die der normalen statistischen Turbulenztheorie, die des größten $L$ dagegen ist noch nicht vom Magnetfeld

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ = Zeit seit Beginn der betrachteten Prozesse [sec] | $\log A = 10{,}4$ | 11,9 | 13,4 | 14,8 | 16,2 | 17,8 |
| $L_K$ = Linearausdehnung der kleinsten noch vorhandenen Turbulenzelemente [cm] . . . . | $\log L = 12{,}0$ | 14,0 | 16,0 | 18,0 | 20,0 | 22,0 |
| $V_K$ = Turbulenzgeschwindigkeit der niedrigsten Ordnung [cm sec$^{-1}$] . . . | $\log V = 3{,}0$ | 3,7 | 4,3 | 5,0 | 5,7 | 6,3 |
| $H$ = Mittlere magnetische Feldstärke [Gauß] . . | $\log H = -8{,}7$ | — 8,0 | — 7,4 | — 6,7 | — 6,0 | — 5,4 |

Tab. 1.

affiziert. Die Grenze liege bei der Länge $L_K$. Dann wird die Turbulenz in der Dimension $L > L_K$ die Feldlinien eines hinreichend homogenen Magnetfeldes weiter auseinanderziehen. Derartige Felder werden aber von allen Turbulenzstufen höherer Ordnung (größer $\approx L$) nach dem früher beschriebenen Beschleunigungsmechanismus dauernd erzeugt. Ausschlaggebend ist offenbar die jeweils kleinste, vom Magnetfeld noch nicht affizierte Stufe der Turbulenz, da sie das größte $D\mathfrak{H}$ liefert. Diese Stufe liefert gleichzeitig den größten Beitrag zur Verwirbelung des Magnetfeldes, solange die magnetische Energiedichte die turbulente Energiedichte dieser Stufe noch nicht überschritten hat. Wir haben demnach keinen wirklich stationären Zustand, sondern das Anwachsen des Magnetfeldes verändert säkular den Charakter der Turbulenz in der geschilderten Weise, so daß jeweils nur in den Stufen $L > L_K$ die normale statistische Theorie noch zuständig ist.

Die Größe $L_K$ der kleinsten zur Zeit $t = A$ noch unbeeinflußten Turbulenzelemente kann demnach abgeschätzt werden, indem verlangt wird, daß die turbulente Energiedichte dieser Ordnung und die Energiedichte des von dieser Ordnung erzeugten und verwirbelten Anteils des Magnetfeldes einander gleich sein sollen:

$$N \frac{m_H}{2} V_K{}^2 = \frac{c^2 \, m_H{}^2}{e^2} \frac{V_K{}^2}{L_K{}^2} e^{2\alpha A/T_K}; \tag{45}$$

$$T_K \approx L_K/V_K. \tag{46}$$

Wenn man in diese Formeln die Konstanten mit den Werten

$$N \approx 10^0 \text{ cm}^{-3}, \quad m_H = 2 \cdot 10^{-24} \text{g}$$

$$\alpha \approx \frac{1}{3}{}^*, \quad V L^{-1/3} = 10^{-1} [\text{cm}^{2/3} \sec^{-1}]$$

einsetzt, erhält man Tab. 1.

Hiernach müßte man also erwarten, wenn man $A = 10^{17}$ sec $\approx$ Weltalter setzt, daß die Turbulenz bis etwa zur Ordnung $10^{21}$ cm $\approx$ 300 parsec affiziert wäre und die Magnetfeldstärke etwa $10^{-5,7}$ Gauß betrüge. Wenn man von deutlich anomalen Gebieten absieht (Orionnebel!), wird man empirisch als Linearausdehnung der kleinsten Turbulenzelemente den mittleren Abstand zweier Gebiete mit linienhafter interstellarer Absorption ansehen, der aus neueren Untersuchungen [16] zu etwa $10^2$ parsec folgt. Diese Abweichung von einer Größenordnung liegt natürlich noch innerhalb der Unsicherheit der Theorie selbst und der in sie eingehenden Konstanten.

IX. Die Überlegungen der Abschnitte IV—VIII gelten ohne weiteres nur für die H II-Regionen des interstellaren Mediums. Wir wollen jetzt zeigen, daß auch dort, wo der Wasserstoff nicht ionisiert ist, sich nichts Wesentliches an unseren Überlegungen ändert.

a) Leitfähigkeit. Wir hatten schon oben (III) gezeigt, daß auch bei einem Ionisationsgrad von $10^{-3} \ldots 10^{-4}$ und Temperaturen von $10^2$ Grad die Leitfähigkeit praktisch als unendlich groß angesehen werden kann.

b) Eingeprägte Kräfte [17]. Die Anwesenheit des Neutralgases macht den Ansatz für die eingeprägte Feldstärke erheblich undurchsichtiger. Wir betrachten gleich den Spezialfall, daß die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Bewegung vernachlässigbar sei und als Kräfte nur die Gradienten der Partialdrucke und die Schwerkraft auftreten. Es gilt dann

$$N_e (\alpha_{en} + \alpha_{in}) \, e \, \mathfrak{E}^e = \alpha_{in} \operatorname{grad} p_e - \alpha_{en} \operatorname{grad} p_i \tag{47}$$

* Die Größe von $\alpha$ ist nicht genau bestimmt. Der Wert 1/3 bedeutet, daß wir mit einer Verdopplung der magnetischen Energiedichte während der Lebensdauer $T$ rechnen.

[16] s. etwa l. c. [12].

[17] Vgl. hierzu A. Schlüter, Dynamik des Plasmas II, Z. Naturforschg.

($N_e$ = Zahldichte der Elektronen, $p_e$, $p_i$ Partialdrucke der Ionen bzw. Elektronen. $\alpha_{en}$ Impulsübertragung zwischen Elektronen und Neutralgas, bezogen auf Dichte 1 und Geschwindigkeitsdifferenz 1.)

Nun folgt für $\alpha_{in} \approx 2 \cdot 10^{-32}$ und $\alpha_{en} \approx 3 \cdot 10^{-35}$ [g cm$^{-3}$ sec$^{-1}$], so daß sich ergibt

$$e\, \mathfrak{E}^e \approx \frac{1}{N_e} \operatorname{grad} p_e + m_e\, g\,. \tag{48}$$

Dies ist aber ein Ausdruck, der sich nicht in der Größenordnung von dem bisher benutzten unterscheidet. Da $\mathfrak{E}^e$ wegen der Unterdrückung der kleinsten Turbulenz nur logarithmisch in das Resultat eingeht, ist eine nicht sehr große Abweichung bestimmt unerheblich.

c) Ambipolare Diffusion. Die Maxwellschen Spannungen wirken direkt nur auf den ionisierten Teil des interstellaren Mediums (den „Plasma"-Teil) und haben daher die Tendenz, eine Relativbewegung zwischen Neutralgas und Plasma hervorzurufen oder in der Sprache der Theorie der Gasentladungen (Schottky) eine ambipolare Diffusion zu erzeugen.

Solange das Magnetfeld ganz schwach ist, nehmen Neutralgas und Plasma gemeinsam an der turbulenten Bewegung teil. Sobald die Energiedichte des Magnetfeldes die der turbulenten Bewegung kleinster Ordnung des *Plasmas* erreicht, versucht es diese zu beeinflussen, während das sich weiter turbulent bewegende Neutralgas durch gegenseitige Stöße das Plasma mitzuziehen versucht. Wenn die Turbulenz des Plasmas tatsächlich bis zur Ordnung $L_K$ wesentlich modifiziert wäre, so wäre die Differenzgeschwindigkeit zwischen Plasma und dem turbulenten Neutralglas von der Ordnung $\Delta V = C L_K^{1/3}$, d. h. für $L_K > 10^{16}$ cm größer als die thermische Geschwindigkeit in H I-Regionen. Man kann dann die Impulsübertragung zwischen Plasma und Neutralgas so der Größenordnung nach abschätzen: $N_0, N_i$ [cm$^{-3}$] seien die Teilchendichte des Neutralgases bzw. des Plasmas und $q$ der Wirkungsquerschnitt für gegenseitige Stöße. Die Zahl der Stöße ergibt sich dann zu

$$(\Delta V)\, N_0\, N_i\, q\, [\mathrm{cm}^{-3}\, \mathrm{sec}^{-1}]\,.$$

Pro Stoß wird ein Impuls der Ordnung $m_H\, \Delta V$ ($m_H$ = Protonenmasse) übertragen, so daß alle Stöße eine Kraftdichte

$$m_H\, q\, (\Delta V)^2\, N_0\, N_i \quad [\mathrm{dyn\, cm}^{-3} = \mathrm{erg\, cm}^{-4}]$$

ergeben. Mit der Länge $L_K$ multipliziert, ergibt sich der magnetische Druck, entgegen dem das Plasma sich noch durch die Kopplung mit dem Neutralgas turbulent weiterbewegen kann. Die Energiedichte des Magnetfeldes kann also nicht größer werden als

$$E_\Delta = N_0 \frac{m_H}{2} (\Delta V)^2\, 2 N_i\, q\, L_K\,.$$

Außerdem ist das Feld natürlich durch die Energiedichte des gesamten Gases beschränkt. Für $2N_i\, q\, L_K > 1$ liegt die zweite Grenze niedriger und man kommt auf unsere frühere Abschätzung zurück. Mit $q \approx 10^{-15}$ cm$^2$, $N_i \approx 10^{-3}$ cm$^{-3}$ ist dies schon für $L_K \approx 10^{18}$ cm der Fall, also in dem gesamten interessierenden Bereich.

Wir können auch die tatsächlich zwischen Plasma und Neutralgas auftretende Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta V$ abschätzen, indem wir $E_K$ gleich der Energiedichte des Magnetfeldes (= Energiedichte $E_K$ der kleinsten nicht affizierten Turbulenz) setzen und dadurch $\Delta V$ bestimmen. Mit den bisher benutzten Werten ($E_K \approx 10^{-12}$ erg cm$^{-3}$, $L_K \approx 10^{21}$ cm) folgt $\Delta V \approx 10^{4.4}$ cm sec$^{-1}$, also als klein gegen die eben benutzte obere Grenze für $\Delta V$ (nämlich $V_K$). Der gefundene Zahlwert ist allerdings recht unsicher, da die Dichten quadratisch eingehen; in den Räumen zwischen interstellaren Wolken kann mit einem merklich größeren $\Delta V$ gerechnet werden.

X. Wir haben bisher nur Prozesse betrachtet, durch die zwangsläufig auch in einem anfänglich nichtmagnetisierten Plasma, das sich in turbulenter Bewegung befindet, magnetische Felder entstehen müssen. Die betrachteten Verwicklungsprozesse laufen aber auch mit magnetischen Feldlinien, die von irgendwelchen anderen Quellen stammen. Dafür kommen in der Milchstraße noch folgende Möglichkeiten in Betracht:

a) die nichtstarre Rotation der Milchstraße insgesamt;

b) die Bewegung geladener Staubteilchen, die infolge ihrer größeren Masse von der des interstellaren Gases abweicht;

c) Abgabe magnetisierter Materie von Sternen.

Die folgende Diskussion dieser Prozesse zeigt, daß ein merklicher Beitrag von den beiden ersten mit Sicherheit auszuschließen ist. Zu Punkt c) können nur sehr unsichere Abschätzungen gemacht werden, die aber ausreichen, einen merklichen Effekt für unwahrscheinlich zu halten.

Wir betrachten die genannten Vorgänge nun im einzelnen:

a) Die differentielle Rotation der Milchstraße repräsentiert eine eingeprägte elektromotorische Kraft.

Soweit sie von der zur Rotationsachse parallelen Koordinate ($z$) abhängt, ist sie wirbelnd. Wir haben also

$$D\mathfrak{H} \approx c \frac{\partial \mathfrak{E}^e}{\partial z} \approx \frac{m_i c}{e} \frac{\partial (v^2)}{r \partial z}, \tag{49}$$

wo $r$ der Achsenabstand ist. Setzen wir Zahlenwerte ein, so folgt

$$D\mathfrak{H} \approx \frac{m_i}{m_H} 10^{-4,0} \cdot \frac{10^{14,8}}{10^{44}} \frac{[\mathrm{cm/sec}]^2}{\mathrm{cm}^2}. \tag{50}$$

Für $\partial z / \partial \ln v^2$ ist hier 1000 parsec eingesetzt, dieser Wert ist vielleicht noch zu klein. Dies gibt

$$D\mathfrak{H} \approx 10^{-34} \text{ bis } 10^{-32} [\text{Gauss sec}^{-1}]$$

und in $3 \cdot 10^9$ Jahren $10^{-17}$ bis $10^{-15}$ Gauß, je nach den Annahmen über $m_i/m_H$ und $\partial z/\partial \ln v^2$. Dies Feld ist zu vergleichen mit demjenigen, welches durch die Aufeinanderfolge der Prozesse in den Turbulenzelementen (ohne Verstärkung durch Verwirbelung) entsteht. Für dieses letztere hatte sich etwa $10^{-12}$ Feldlinien $\mathrm{cm}^{-2}$ ergeben, es ist also weitaus größer.

b) Die interstellaren Staubteilchen (besser: „Rauch"-Teilchen, da sie hauptsächlich durch Kondensation und nicht durch Zermahlung größerer Gebilde entstehen) sind sicherlich geladen; auf die Größe und das Vorzeichen der Ladung kommt es im folgenden nicht an, jedenfalls ist ihre spezifische Ladung $e/m_{\mathrm{Staub}}$ um viele Größenordnungen geringer als die der Ionen. Man würde daher für ein Gemisch von Staub und der entsprechenden Zahl entgegengesetzt geladener leichter Teilchen eine Feldlinienerzeugung erwarten, die nach Gl. (10) um entsprechend viele Größenordnungen größer wäre. Dies ist aber wegen der Anwesenheit der übrigen Teilchen nicht der Fall. Wir werden, um dies zu begründen, nicht die verhältnismäßig mühevolle Diskussion des Verhaltens eines Gemisches dreier geladener Teilchensorten (Elektronen, Ionen, Staubteilchen) durchführen, sondern die Grenzfälle direkt betrachten.

Wenn die Wechselwirkung des Staubes mit den Plasmateilchen durch Stöße, Anlagerungen und dergleichen gering ist, können wir die Bewegung des geladenen Staubes im Plasma als einen erzwungenen zusätzlichen Strom der Dichte $\mathfrak{J}$ betrachten, der zu dem Plasmastrom $\mathfrak{j}$ hinzutritt. Wenn man einen solchen zusätzlichen Strom in die Grundgleichungen für ein unendlich gut leitendes Plasma einführt, ändert sich an der Gleichung $\mathfrak{E}^m = -\mathfrak{E}^e$ und damit auch an der Gleichung

$$D\mathfrak{H} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}^e$$

überhaupt nichts. D. h. auch durch einen in dem interstellaren Medium erzwungenen Strom werden keine magnetischen Feldlinien erzeugt. Der physikalische Grund ist, daß sofort Induktionseffekte eintreten, die einen zusätzlichen Plasmastrom $\mathfrak{j}$ erzwingen, der den eingeprägten Strom $\mathfrak{J}$ genau kompensiert. Eine indirekte Wirkung tritt allerdings dadurch ein, daß auf den zusätzlichen Plasmastrom $\mathfrak{j}$ jetzt die Lorentz-Kraft $[\mathfrak{j}\mathfrak{H}]$ wirkt und das dynamische Gleichgewicht ändert, dadurch wird wieder die eingeprägte Kraft $\mathfrak{E}^e$ abgeändert und somit sekundär doch auch das $D\mathfrak{H}$, d. h. die Feldlinienerzeugung. Da diese Beeinflussung aber über die Dynamik hinweg geht, kann die Änderung durch den Staub nur von der Ordnung sein, die dem Verhältnis seiner Energiedichte zur Energiedichte des interstellaren Gases entspricht. Dies Verhältnis ist wegen der kleinen Massendichte des Staubes fast überall aber sehr klein.

Die anderen Grenzfälle, die man leicht übersehen kann, sind die einer engen Kopplung des Staubes mit *einem* der Bestandteile des Plasmas, z. B. mit den Elektronen. Eine solche Kopplung würde offenbar nur bewirken, daß der Staub der Elektronenkomponente zuzurechnen wäre. Hierdurch würde das effektive Verhältnis $e/m$ der Elektronenkomponente um den relativen Massenanteil des Staubes verändert — und entsprechend gegebenenfalls für die Ionenkomponente. Diese Änderungen wären also auch wegen der geringen Häufigkeit des Staubes sehr klein — zumal, wenn man berücksichtigt, daß $D\mathfrak{H}$ in die Endformel nur logarithmisch eingeht.

c) Wir diskutieren als letztes die Möglichkeit des Transports magnetischer Felder von Sternoberflächen in den interstellaren Raum durch aufsteigende Protuberanzen. Ein Sonnenfleck enthält etwa $10^{21}$ Feldlinien [Gauß $\mathrm{cm}^2$]. Vielleicht darf man annehmen, daß pro Stern im Mittel alle $10^6$ sec $^1/_{1000}$ der Feldlinien eines Flecks in den interstellaren Raum verfrachtet würden. Die Turbulenz des interstellaren Gases würde aber kaum ausreichen, um die Feldlinien auseinanderzuziehen, da die magnetische Energiedichte in den auf diese Art in den interstellaren Raum gelangenden Ballen dazu viel zu groß und ihre Ausdehnung zu klein ist gegen die Ausdehnung der kleinsten Turbulenzelemente. Die magnetischen Ballen würden ein isoliertes Dasein führen, bis ihre magnetische Energie in Joulesche Wärme übergegangen ist, die Zeitskala für diesen Vorgang ist wieder $Q\sigma/c^2$ sec, für $Q = 10^{18}\,\mathrm{cm}^2$ und $\sigma = 10^{11}$ also von der Ordnung 3 Jahre. Die Schlußfolgerung, daß dieser Vorgang nur einen geringen Beitrag zu den interstellaren Magnetfeldern liefert, ist nicht ganz sicher begründet, da die Sonne vielleicht in bezug auf ihre Aktivität nicht als typisch zu betrachten ist (man denke an die magnetischen Sterne und die Zwergsterne mit Ca II-Emissionslinien). Es muß die Eventualität im Auge behalten werden, daß auf diese Art die Zahl der im interstellaren Raum vorhandenen Feldlinien etwas höher geworden ist, als unsere früheren Betrachtungen ergeben.

XI. Im vorstehenden haben wir gezeigt, daß man in der Milchstraße ein unregelmäßiges Magnetfeld von einer mittleren Feldstärke der Ordnung einiger $10^{-6}$ Gauß erwarten muß. Der erhaltene Zahlwert kann angesichts des komplizierten Zusammenspiels vieler Effekte und der Unsicherheit und der örtlichen Schwankungen der eingehenden Größen des interstellaren Gases leicht um eine Größenordnung verkehrt sein, und zwar in dem Sinne, daß das galaktische Feld eher stärker als schwächer ist als angegeben. Jedenfalls ist die Übereinstimmung mit dem Wert von $10^{-5,3}$ Gauß, der nötig ist, um die Teilchen der kosmischen Ultrastrahlung in der Milchstraße zusammenzuhalten, genügend.

Es liegt nahe, zu vermuten, daß es kein Zufall ist, daß die Energiedichte der Ultrastrahlung anscheinend gerade die des interstellaren Magnetfeldes erreicht, oder sie nur um sehr wenig übertrifft. Wäre die Erzeugung an Ultrastrahlung so reichlich, daß ihr kinetischer Gasdruck ($\approx {}^1/_3$ der Energiedichte) größer wäre als die Maxwellschen Spannungen des interstellaren Magnetfeldes, dann würde die Ultrastrahlung am Rande der Milchstraße, d. h. dort wo die interstellare Materie aufhört, die Magnetfeldlinien, die an und für sich geschlossen in interstellaren Gasen verlaufen, aufreißen und entlang dieser aufgerissenen Feldlinien in den intergalaktischen Raum gelangen können. Wenn dies in einem erheblichen Umfange geschieht, nimmt die Dichte der Ultrastrahlung in der Galaxis ab, und zwar so lange, bis der Diffusion in dem intergalaktischen Raum und der Absorption auf den verschlungenen Wegen innerhalb der Galaxis durch die Produktion an Höhenstrahlteilchen das Gleichgewicht gehalten wird.

Ein turbulentes galaktisches Magnetfeld führt nicht nur zu einer Konzentration und einer isotropen Geschwindigkeitsverteilung der Höhenstrahlung innerhalb der Milchstraße, sondern trägt nach einem von F. Fermi[3] angegebenen Mechanismus zur weiteren Beschleunigung von geladenen Teilchen bei, die irgendwoher bereits eine Geschwindigkeit erhalten haben, die einen merklichen Bruchteil (${}^1/_2 \ldots {}^1/_3$) der Lichtgeschwindigkeit $c$ ausmacht. Ein solches Teilchen gewinnt nämlich jedesmal, wenn es seinem Flug entlang einer magnetischen Feldlinie „reflektiert" wird, d. h. seine mittlere Bewegungsrichtung (gemittelt über einen Larmor-Umlauf um die Feldlinie herum) umkehren muß, und die Feldlinie sich mit der Geschwindigkeit $V$ bewegt im Mittel über viele Stöße die Energie pro Stoß $\delta E \approx V^2 E/c^2$, wobei in $E$ die relativistische Ruheenergie des Teilchens eingeschlossen ist. Erlebt das Teilchen durchschnittlich alle $\tau$ Sekunden einen Stoß, so wächst seine Energie im Mittel exponentiell mit der Zeit

$$E \sim \exp\left\{\frac{V^2}{c^2}\,\frac{t}{\tau}\right\}.$$

Andererseits haben die Teilchen nur eine mittlere freie Flugzeit $T$, die wegen der vernachlässigbaren Ionisationsverluste durch die direkten Kerntreffer im interstellaren Gas gegeben ist, und die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen zu treffen, daß schon mindestens die Zeit $t$ unterwegs ist, ist

$$w(t) \sim \exp\{-t/T\}.$$

Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen mit der Energie $E$ oder einer größeren anzutreffen.

$$w(E) \sim E^{-(c^2\tau/V^2 T)},$$

also, wie beobachtet, eine exponentielle, von der Energie abhängige Häufigkeit. Der empirische Exponent ist $-1{,}8$.

Fermi ist der Meinung, daß man ohne unvernünftige Annahmen über $\tau$ und $V$ Übereinstimmung mit der Erfahrung erreichen kann. In unserem Bild von der Struktur der interstellaren Magnetfelder hat man aber offenbar gar keine Freiheit — für $V$ muß man die Geschwindigkeit der kleinsten Turbulenzelemente, d. i. $V \approx 10^6$ cm sec$^{-1}$, und für $\tau$ ihren Durchmesser, dividiert durch die Lichtgeschwindigkeiten, einsetzen, $10^{9,5}$ sec. Mit dem aus der mittleren interstellaren Dichte von ungefähr $10^{-23,5}$ g cm$^{-3}$ folgenden Werte für die mittlere freie Flugzeit $T \approx 10^{15,5}$ sec folgt für den Exponenten $-10^{-3}$, d. h. der Fermische Prozeß trägt zur Energiezunahme der Höhenstrahlteilchen tatsächlich nur ganz unerheblich bei. Das beobachtete Vorkommen sehr rasch bewegter Wolken interstellaren Gases läßt diesen Schluß allerdings als nicht zwingend erscheinen. Andererseits bildet der erhebliche Anteil schwerer Teilchen in der Ultrastrahlung, welche anscheinend dasselbe

Spektralgesetz befolgen wie die Protonen [18], eine von Fermi selbst betonte Schwierigkeit.

XII. Alle bisherigen Betrachtungen gingen im Prinzip von der Impulsbilanz der verschiedenen Bestandteile der interstellaren Materie (einschließlich Höhenstrahlung und Magnetfeldern) aus — die auftretenden Energiedichten waren nur zur Abschätzung der Drucke und ponderomotorischen Spannungen benutzt worden. Zu einer vollständigen Analyse gehört aber noch die Aufstellung der Energiebilanz [19].

Die Quelle der Bewegungen der interstellaren Materie ist die differentielle Rotation der Milchstraße. Nur in verhältnismäßig kleinen Gebieten und bei sehr dichter Häufung heißer Sterne haben die Sterne (vor allem durch den Strahlungsdruck) einen wesentlichen Einfluß. Aus der (bekannten) Abnahme der Winkelgeschwindigkeit mit der Entfernung vom galaktischen Zentrum kann der Verlust an Rotationsenergie durch turbulente Reibung zu größenordnungsmäßig $10^{-25}$ bis $10^{-24}$ erg cm$^{-3}$ sec$^{-1}$ abgeschätzt werden. Durch diesen Einfluß wird die turbulente Bewegung des interstellaren Gases (und des dagegen wegen seiner geringen mittleren Massendichte nicht wesentlichen interstellaren Staubes) erzwungen. Für Turbulenzelemente, deren Linearausdehnung klein gegen die Dicke der Milchstraße ($\approx 400$ parsec) ist, ist der mittlere Bewegungszustand isotrop und es gelten die Gesetze des normalen statistischen Gleichgewichts der Turbulenzelemente — also vor allem die Beziehung $V_L L^{-1/3} = C$, unabhängig von $L$ —, da die Kompressibilität trotz $V \gg$ Schallgeschwindigkeit vermutlich keine wesentlichen Modifikationen an diesen bringen, weil sie allein aus Dimensionsbetrachtungen gewonnen werden können. Die turbulente Bewegung führt nun ihrerseits zur Erzeugung und zum dauernden Anwachsen interstellarer Magnetfelder. Diese geben nach dem Fermischen Prozeß wieder Energie an die Höhenstrahlung weiter. Die für beide Prozesse verbrauchte Energie ist aber sehr klein [$\mathfrak{H}\, d\mathfrak{H}/dt$ müßte $\approx 10^{-23}$ Gauß$^2$ sec$^{-1}$ sein, um die Leistung $10^{-24}$ erg cm$^{-3}$ sec$^{-1}$ zu verbrauchen, während der Fermi-Prozeß, wenn er in der Tat für die Energie der gesamten Höhenstrahlung ($\approx 10^{-12}$ erg cm$^{-3}$) verantwortlich wäre — in Wirklichkeit müßte auch nach Fermi der größere Teil der Energie bei der Injektion mitgeliefert werden —, diese Energie in der Zeit $T = 10^{15.5}$ sec aufbringen müßte, also einen Leistungsbedarf von $\approx 10^{-27.5}$ erg cm$^{-3}$ sec$^{-1}$ hätte].

Da diese Energieverluste also unerheblich sind, muß der durch die Hierarchie der Turbulenz hindurchfließende Energiestrom durch molekulare Reibung vernichtet werden. Das kann nur in Dimensionen geschehen, in denen die Bewegung durch die interstellaren Magnetfelder bereits wesentlich beeinflußt sind.

Die Grundgedanken der Turbulenztheorie sind nun auch auf die möglichen Bewegungszustände eines unendlich guten Leiters in einem Magnetfeld anwendbar: Die Bewegungsgleichungen sind nichtlinear [20] und durch diese Nichtlinearität wird die Energie zwischen den verschiedenen Freiheitsgraden ausgetauscht. Der Bewegungszustand wird in großen Dimensionen von außen erzwungen (hier also von der differentiellen Rotation der Milchstraße), während in den Freiheitsgraden, die zu den kleinsten Dimensionen gehören, die Reibung wesentlich wird. So muß also auch in einem Magnetfeld der Energiefluß durch die Bewegungen verschiedener Ausdehnung bis zu lokalen Bewegungen hin verlaufen, wo die Energie dissipiert wird — nur folgt hier nicht mehr notwendig dieselbe Form des Spektralgesetzes.

Vermutlich ist dies für die H II-Regionen die angemessene Betrachtungsweise. Für die Gegenden, wo der Wasserstoff nicht ionisiert ist, ist die Dissipation durch Reibung sicher noch größer, da mit der oben betrachteten ambipolaren Diffusion (9c) stets ein Energieverlust verbunden ist. Wir hatten gezeigt, daß in den H I-Regionen die Feldlinien zwar zunächst an der Plasma-Komponente festhängen, daß aber die Reibung zwischen Neutralgas und Plasma so stark ist, daß doch die Bewegung des Neutralgases die Verwirbelung der Feldlinien bewirkt, seine Energiedichte also maßgebend ist. In Dimensionen, in denen die Energiedichte der turbulenten Bewegung des Neutralgases klein gegen die des Magnetfeldes ist, wirkt das an den Magnetfeldlinien hängende Plasma also als zusätzliche Bremse, so daß überhaupt kein Dissipationsproblem besteht.

[18] M. S. Vallarta, Physic. Rev. **77**, 419 [1950].

[19] Vgl. zum folgenden vor allem: C. F. v. Weizsäcker, l. c. [8].

[20] Für unendliche Leitfähigkeit (im Sinne der früheren Betrachtungen) gilt folgendes System von Grundgleichungen, sobald die molekulare Reibung außer Betracht bleiben kann,

$$\varrho\left[\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + (\mathfrak{V}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{V}\right] = -\,\mathrm{grad}\, P - \frac{1}{4\pi}\,[\mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}]\,,$$

$$D\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,[\mathfrak{V}\,\mathfrak{H}] = 0\,,$$

wozu noch die Kontinuitätsgleichung und die Zustandsgleichung treten. Die eingeprägten elektromotorischen Kräfte dürfen hier vernachlässigt werden.

Den Energieverlust durch Stöße zwischen Plasmateilchen und Neutralteilchen (also im wesentlichen zwischen Metall-Ionen und Wasserstoffatomen) läßt sich so abschätzen: pro Stoß wird der Bruchteil $m_H/m_i \approx 10^{-1}$ der kinetischen Energie eines Wasserstoffatoms umgesetzt, mit der im Abschnitt (IXc) angegebenen Stoßhäufigkeit folgt also als Energiedissipation

$$(m_H^2/2\,m_i)\; q\; N_0\; N_i\; (\Delta V)^3 \qquad [\mathrm{erg\ cm^{-3}\ sec^{-1}}]$$

und um die Leistungsdichte von $10^{-24}$ erg cm$^{-3}$ sec$^{-1}$ umzusetzen, ist eine Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta V \approx 10^6$ cm sec$^{-1}$ erforderlich. Wir hatten aber für die tatsächliche Größe von $\Delta V$ den Wert $10^{4.4}$ cm sec$^{-1}$ abgeschätzt. Danach sollte i. allg. der Beitrag der ambipolaren Diffusion zur Energiedissipation unerheblich sein. Bei den starken lokalen Schwankungen der eingehenden Größen mag er jedoch in einzelnen Bereichen wesentlich sein.

Den HHrn. O. Haxel, C. F. v. Weizsäcker und G. K. Batchelor sind wir für wichtige Anregungen zu großem Dank verpflichtet. Ganz besonders möchten wir Hrn. W. Heisenberg danken für sein großes Interesse und zahlreiche Diskussionen.

# Zur Quantentheorie der Elementarteilchen

Von W. Heisenberg
Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **5a**, 251—259 [1950]; eingegangen am 23. Februar 1950)

Die Fortschritte, die in den letzten Jahren in der Quantentheorie der Wellenfelder erzielt worden sind, genügen, um ein mathematisches Schema anzugeben, nach dem die zukünftige Theorie der Elementarteilchen möglicherweise konstruiert ist. Dieses Schema hat die folgenden Eigenschaften: Die Gesamtheit aller Elementarteilchen wird durch ein einziges Spinorfeld dargestellt. Dieses Spinorfeld genügt (in der sogenannten Wechselwirkungsdarstellung) einer im ganzen Raum-Zeit-Gebiet regulären Vertauschungsrelation (mit positivem Zeichen); ferner wird eine relativistische Invariante als Wechselwirkungsenergie (ein Ausdruck mindestens 4. Grades im Spinorfeld) vorgegeben. Diese beiden Funktionen, die Vertauschungsfunktion und die Wechselwirkungsenergie, charakterisieren die Theorie vollständig. Aus ihnen lassen sich die Ruhmassen aller Elementarteilchen grundsätzlich berechnen, wobei eine reinliche Scheidung zwischen Elementarteilchen und zusammengesetzten Teilchen unmöglich ist. Aus diesem Grunde kommen im allgemeinen Elementarteilchen sowohl mit ganzzahligen wie mit halbzahligen Spinwerten (dementsprechend Bose- bzw. Fermi-Statistik) vor; auch die Lichtquanten sind durch das Spinorfeld darzustellen. Bei der Berechnung der Ruhmassen oder der Wechselwirkung der Elementarteilchen treten wegen der regulären Vertauschungsrelation keinerlei divergente Ausdrücke auf, vielmehr verhält sich die ganze Theorie mathematisch ebenso regulär wie die gewöhnliche unrelativistische Quantenmechanik. Diese Eigenschaften scheinen dem Verf. ein starkes Argument dafür, daß die spätere Theorie der Elementarteilchen, die man dann auch eine „einheitliche Feldtheorie" nennen könnte, nach einem derartigen Schema konstruiert ist.

Die großen Fortschritte, die in der Quantentheorie der Wellenfelder in den letzten Jahren erzielt worden sind, haben verschiedene Bausteine für eine künftige Theorie der Elementarteilchen zusammengetragen. Zunächst ist der mathematische Apparat zur durchgehend relativistischen Behandlung einer Feldtheorie durch die Arbeiten von Tomonaga[1], Feynman[2], Schwinger[3] und Dyson[4] weitgehend vervollkommnet worden. Dann haben Bopp[5], Stückelberg[6], Pais[7], Pauli und Villars[8]

[1] S. Tomonaga, Progress theor. Physics **1**, 27 [1946]; Koba, Tati u. S. Tomonaga, ibid. **2**, 101, 198 [1947]; S. Kanesawa u. S. Tomonaga, ibid. **3**, 1, 101 [1948] u. S. Tomonaga, Physic. Rev. **74**, 224 [1948]; vgl. auch W. Heisenberg, Z. Physik **110**, 251 [1938].

[2] R. P. Feynman, Rev. mod. Physics **20**, 367 [1948]; Physic. Rev. **74**, 939, 1430 [1948]; J. Wheeler u. R. P. Feynman, Rev. mod. Physics **17**, 157 [1945].

[3] J. Schwinger, Physic. Rev. **74**, 1439 [1948]; **75**, 651 [1949]; **75**, 790 [1949].

[4] F. J. Dyson, Physic. Rev. **75**, 486, 1736 [1949].

[5] F. Bopp, Ann. Physik **42**, 575, u. **43**, 565 [1943]; Z. Naturforschg. **1**, 53, 237 [1946].

[6] E. C. Stückelberg, Nature **144**, 118 [1939]; Helv. physica Acta **14**, 51 [1941]; E. C. Stückelberg u. D. Rivier, Physic. Rev. **74**, 218, 986 [1948]; D. Rivier, Helv. physica Acta **22**, 265 [1949].

[7] A. Pais, The Development of the Theory of the Electron, Princeton Univ. Press, 1948.

[8] W. Pauli u. F. Villars, Rev. mod. Physics **21**, 434 [1949].